Кодайра Куніхіко

(16.03.1915 — 26.07.1997)

МАТЕМАТИКА

в рідній школі

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ
№ 5 (164) 2015, ТРАВЕНЬ
ЩОМІСЯЧНИК
Передплатний індекс **68834**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

Заснований у 1997 р.
До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою «Математика в школі»; до 2014 р. журнал виходив під назвою «Математика в сучасній школі».

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації, серія КВ №20025-8925 пр від 25.06.2013 р.

ЗМІСТ

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

(ПРОГРАМА ЕЛЕКТИВНОГО КУРСУ)

Василь ШВЕЦЬ — завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ ім. М. П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук;

Алла ПРУС — доцент кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики ЖДУ ім. І. Франка, кандидат педагогічних наук, доцент

Пояснювальна записка

Математичні вправи з параметром традиційно є одними із найскладніших для розв'язування в курсі елементарної математики як у загальноосвітній школі, так і у вищому навчальному закладі. Вміння їх розв'язувати цілком справедливо вважається показником високого рівня математичної компетентності учня, студента оскільки демонструють гарне засвоєння ними теоретичних відомостей з математики та вміле застосування одержаних знань на практиці у нестандартних ситуаціях. Значну кількість вправ з параметром подано і у чинних шкільних підручниках, представлено також серед завдань державної підсумкової атестації, ЗНО тощо. Отже, їх потрібно вміти розв'язувати.

Така потреба робить доцільним введення спецкурсу «Рівняння і нерівності з параметром у шкільному курсі математики» для учнів 9 — 11 класів.

Даний спецкурс пропонується учням, які зацікавлені математикою, прагнуть розвивати свої здібності, адже пошук методів і способів розв'язування завдань із параметрами належить до творчих процесів мислення.

Під час вивчення спецкурсу в учнів формуються вміння і навички розумової праці, планування своєї діяльності, пошук раціональних шляхів її виконання, оцінка і критичне ставлення до власних здобутків, осмислення допущених помилок і недоліків тощо.

Провідною ідеєю програми спецкурсу є те, що її реалізація має забезпечувати як розвиток інтелекту учнів, так і максимально можливу реалізацію їх математичних здібностей.

Мета курсу:

- розширити і поглибити знання учнів про рівняння і нерівності в контексті вивчення відомостей про рівняння і нерівності з параметрами;
- розширити і поглибити знання учнів про основні методи і способи розв'язування рівнянь і нерівностей, зокрема рівнянь і нерівностей з параметрами;
- сформувати на достатньому і вищих рівнях вміння і навички розв'язувати лінійні рівняння (нерівності) з параметром, рівняння другого (нерівності другого) та вищих степенів із параметрами, раціональні та тригонометричні рівняння (нерівності) з параметрами;
- ознайомити учнів з графічним методом розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром у прямокутній декартовій системі координат *xOy*, *xOa* та *aOx*;
- сприяти розвитку продуктивного мислення учнів, підготовці їх до участі у математичних олімпіадах та різної низки математичних конкурсів;
- поповнити шкільний курс математики новими темами, необхідними учням для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

Зміст програми (*35 год*) (*див. табл. 1*)

Методичні рекомендації

Уміння і навички розв'язувати рівняння (нерівності) з параметром формуються і закріплюються в учнів лише за умови наполегливої і систематичної роботи протягом вивчення всього курсу. Програму побудовано так, що спочатку учні розв'язують менш складні завдання, а далі їх складність зростає. Таким чином відбувається накопичення знань про рівняння і нерівності з параметром, формування початкових умінь і навичок, а на їх основі – більш узагальнених, складніших.

Програмою спецкурсу передбачено ознайомити учнів з найпоширенішими у шкільній практиці видами рівнянь і нерівностей з параметром та способами їх розв'язування. Виклад матеріалу варто будувати, в основному, шляхом розв'язування багатьох вправ із відповідними теоретичними обґрунтуваннями та поясненнями. Під час проведення занять слід мати на увазі, що теоретичний матеріал повинен учнями усвідомлюватися, тому має здійснюватися диференційований підхід до них. Це саме треба мати на увазі і стосовно вироблення вмінь і навичок розв'язування вправ.

Вивчення курсу розраховане на 35 годин. Розподіл годин за темами — орієнтовний, його можна змінювати залежно від контингенту

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 1. Знайомство з параметром (*2 год*) Рівняння з двома змінними. Рівносильні рівняння, метод евристичної редукції. Параметр. Рівняння з параметром. Область визначення рівняння, область зміни параметра. Приклади рівнянь із параметром	– *знає*, що таке рівняння з двома змінними, розв'язок рівняння; – *знає*, що таке рівняння з параметром, що таке параметр; – *має уявлення* про метод евристичної редукції; – *вміє* знаходити для нескладних рівнянь з параметром їх область визначення, область значень параметра
Тема 2. Раціональні рівняння з параметром (*8 год*) Лінійні рівняння з параметром і їх розв'язання. Рівняння другого степеня з параметром і їх розв'язання. Вправи з параметром, які пов'язані з квадратним тричленом. Дробово-раціональні рівняння з параметром і їх розв'язання	– *розпізнає* лінійні рівняння, рівняння другого степеня, дробово-раціональні рівняння з параметром; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі рівняння; – *розв'язує* вправи з параметром, які пов'язані з квадратним тричленом
Тема 3. Раціональні нерівності з параметром (*6 год*) Лінійні нерівності з параметром і їх розв'язання. Нерівності другого степеня з параметром і їх розв'язання. Дробово-раціональні нерівності з параметром і їх розв'язання	– *знає*, що таке нерівність з параметром, що таке її область визначення; – *розпізнає* лінійні нерівності другого степеня, дробово-раціональні нерівності з параметром; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі нерівності
Тема 4. Системи рівнянь (нерівностей) з параметром (*4 год*) Системи двох лінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними з параметром і їх розв'язання. Системи двох нелінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними і їх розв'язання	– *знає*, що таке система двох лінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними з параметром; – *має уявлення* про систему нелінійних рівнянь (нерівностей) з двома змінними; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі системи рівнянь (нерівностей) з параметром
Тема 5. Модуль у рівняннях (нерівностях) з параметром (*2 год*) Рівняння та системи рівнянь з параметрами, що містять модуль. Нерівності та їх системи з параметром, що містять модуль	– *розпізнає* рівняння (нерівності) та їх системи з параметром, що містять модуль; – *вміє* розв'язувати вказані в програмі рівняння (нерівності) і їх системи з параметром
Тема 6. Ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром (*3 год*) Ірраціональні рівняння з параметром і їх розв'язання. Ірраціональні нерівності з параметром і їх розв'язання	– *має уявлення* про ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром; – *вміє* розв'язувати простіші ірраціональні рівняння (нерівності) з параметром
Тема 7. Трансцендентні рівняння (нерівності) з параметром (*5 год*) Тригонометричні рівняння (нерівності) з параметром. Показникові рівняння (нерівності) з параметром. Логарифмічні рівняння (нерівності) з параметром	– *має уявлення* про трансцендентні рівняння (нерівності) з параметром; – *вміє* розв'язувати простіші тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння (нерівності) з параметром
Тема 8. Графічний метод розв'язування рівнянь (нерівностей) з параметром (*3 год*) Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром графічним методом у прямокутній декартовій системі координат xOy. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром у прямокутній декартовій системі координат xOa та aOx	– *вміє* розв'язувати простіші рівняння і нерівності графічним методом у прямокутній декартовій системі координат xOy; – *має уявлення* про прямокутні декартові системи координат xOa та aOx і з чим пов'язана їх поява; – *вміє* розв'язувати простіші рівняння і нерівності графічним методом, використовуючи прямокутні декартові системи координат xOa та aOx
Тема 9. Розв'язування рівнянь (нерівностей) з параметром підвищеної складності (*2 год*) Вибрані задачі шкільних математичних олімпіад, що містять параметр і їх розв'язання. Задачі з параметром у структурі завдань ЗНО і їх розв'язання	– *знайомий* із завданнями з параметром, які пропонуються на математичне змагання школярів; – *готовий* до їх розв'язування

учнів, класу, в якому вони навчаються. У 9 класі спецкурс можна вводити з другого семестру, обравши для вивчення, наприклад, п'ять перших тем, а потім, у другому семестрі 10 класу, продовжити, вивчаючи решту запропонованих тем. Зрозуміло, що план вивчення може бути й іншим, це має визначити вчитель, який працюватиме із зацікавленими учнями.

У повному обсязі даний спецкурс рекомендується проводити в 11 класі протягом року при тижневому навантаженні — 1 година або протягом одного семестру при тижневому навантаженні — 2 години.

Під час вивчення цього спецкурсу потрібно передбачати різні види контролю результатів навчальних досягнень учнів з метою їх коригування і вдосконалення.

ОЗНАЙОМЛЕННЯ З ПАРАМЕТРОМ ТА РІВНЯННЯМИ З ПАРАМЕТРАМИ

Рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей із параметрами можна часто бачити серед завдань учнівських математичних олімпіад, державної підсумкової атестації з математики, зовнішнього незалежного оцінювання, контрольних робіт на конкурсах-захисті дослідницьких робіт, що проводить Мала академія наук тощо. Вміння розв'язувати такі завдання цілком справедливо вважають показником високого рівня математичної компетентності учня, абітурієнта, студента. Значна кількість вправ із параметрами є й у чинних підручниках із математики. Їх розв'язування пов'язане зі значними труднощами, подолати які вдається не кожному.

Цією статтею ми започатковуємо серію публікацій, присвячених **розв'язуванню рівнянь,**

нерівностей і їх систем з параметром, які можуть слугувати вчителю методичними розробками практичних занять математичного гуртка, практичних занять факультативу чи елективного курсу із зазначеної теми.

Розпочнемо з рівнянь з параметром.

Оскільки поняття *параметр* пов'язане з поняттям *рівняння*, то зупинимося на означенні останнього. Розглянемо дві аналітично задані числові функції з двома змінними $u = f_1(x; y)$ та $u = f_2(x; y)$, областями визначення яких є, відповідно, множини $D(f_1)$ та $D(f_2)$, де u, x, y — дійсні числа. Нехай множина $D = D(f_1) \cap D(f_2)$ — спільна область множин $D(f_1)$ та $D(f_2)$. Запишемо формальну рівність обох функцій $f_1(x; y) = f_2(x; y)$.

Якщо для цієї рівності сформулювати вимогу — «знайти всі пари значень змінних $(x; y)$ з області D, при яких вона перетворюється в правильну числову рівність», то **таку рівність разом із вимогою називають рівняннями з двома змінними.** Отже,

***Означення 1.* Рівність $f_1(x; y) = f_2(x; y)$, де $f_1(x; y)$ і $f_2(x; y)$ — аналітично задані функції з областю визначення відповідно $D(f_1)$ і $D(f_2)$, називають рівнянням з двома змінними, а множину $D = D(f_1) \cap D(f_2)$ — областю визначення рівняння, якщо ставиться вимога – знайти всі пари значень змінних $(x; y)$ із множини D, при яких значення обох функцій рівні.**

Кожну пару чисел $(x; y)$, яка задовольняє рівність, називають розв'язком рівняння. Всі розв'язки рівняння утворюють множину D_r, яка називається множиною розв'язків. Очевидно, що $D_r \subset D$. Множина розв'язків може бути порожньою. Тоді кажуть, що рівняння розв'язків не має.

Слід зазначити, що якщо рівність задовольняють усі пари чисел $(x; y)$, які належать множині D, то таку рівність називають **тотожною рівністю** або **тотожністю** на множині D. Рівняння, як відомо — **розв'язуються**, а тотожності — **доводяться**. Розв'язати рівняння означає — знайти множину всіх його розв'язків.

Означити рівняння з двома змінними можна й інакше, вибравши як родове поняття не функцію з двома змінними, а вираз із двома змінними. Пропонуємо читачу зробити це самостійно. Ми ж надалі будемо дотримуватися означення, яке наведене вище.

Отже, нехай дано рівняння з двома змінними

$$f_1(x; y) = f_2(x; y), \qquad (1)$$

в якому змінні x і y — незалежні змінні.

Досить часто одній із них надають особливого статусу і називають ***параметром*** та позначають першими літерами латинського алфавіту a, b, c. Наприклад, надавши статус параметра змінній y і позначивши її літерою a, матимемо рівняння з параметром a:

$$f_1(x; a) = f_2(x; a). \qquad (2)$$

Параметр [від грецьк. *parametreo* — вимірюю що-небудь, порівнюю з чим-небудь іншим] — величина, яка за певних умов не змінює свого значення [1].

Надання одній із змінних статусу параметра пов'язане зі **зміною вимоги в рівнянні** (1), у якій ідеться не лише про відшукання розв'язків рівняння, а й про те, що числа, які входять до розв'язку, мають задовольняти додаткові вимоги (співвідношення). З цього приводу розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0.$$

Наведене рівняння, очевидно, є рівнянням із двома змінними a і x, у якому параметром є змінна a. Суть вимоги в даному випадку полягає в наступному: якщо змінну a вважати сталою величиною, то задане рівняння можна розглядати як *рівняння з однією змінною x*. При цьому вимагається знайти множину його розв'язків залежну від значень параметра a. Оскільки значенням параметра a в цьому рівнянні може бути будь-яке дійсне число, то його запис задає ціле сімейство (нескінченну множину) рівнянь з однією змінною x. Окремі рівняння цього сімейства можна отримати, взявши конкретні значення параметра a. Якщо, наприклад, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, то, відповідно, матимемо рівняння:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$; $6x + 7 = 0$;

$x^2 + 10x + 11 = 0$.

Отже, вимогу в заданому прикладі слід розуміти так: вважаючи змінну a параметром і розглядаючи задане рівняння як рівняння зі змінною x, знайти як виражатимуться його корені залежно від значень параметра a.

Приклад 2. За яких значень параметра a рівняння $x^2 - x + a = 0$ має два корені x_1 і x_2, що задовольняють умову $x_1^2 + x_2^2 = 25$?

Наведене рівняння, очевидно, також є рівнянням з двома змінними a і x, у якому параметром обрано змінну a. Її значенням може бути будь-яке дійсне число. Наприклад, взявши $a = 0$, матимемо рівняння $x^2 - x = 0$, корені якого $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$ вказану умову не задовольняють. Якщо $a = 1$, то матимемо рівняння $x^2 - x + 1 = 0$, яке коренів не має, а тому вказана умова $x_1^2 + x_2^2 = 25$ не буде виконуватися. Пам'ятаючи, що рівняння з параметром $f_1(x; a) = f_2(x; a)$ — це символічний запис цілого сімейства рівнянь зі змінною x, вимогу в даному прикладі слід розуміти так: знайдіть усі значення параметра a, при якому обидва корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - x + a = 0$ (а воно буде квадратним), задовольняють вимогу $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Приклад 3. Знайдіть усі значення змінної a, за яких обидва рівняння $x^2 - ax + 4 = 0$ і

$3x^2 - ax + a - 3 = 0$ матимуть спільний дійсний корінь.

Обидва рівняння, очевидно, є рівняннями з параметром. Зі змісту умови видно, що статус параметра надається змінній a, хоча про це явно не сказано. Її значенням може бути будь-яке дійсне число, при цьому, очевидно, кожне з рівнянь буде квадратним. При певних значеннях параметра кожне з рівнянь або матиме корені, або ні. В даному прикладі вимогу слід розуміти наступним чином: знайдіть усі дійсні значення змінної (параметра) a, за яких обидва рівняння мають спільний корінь.

Наведені приклади 1 — 3 показують, що вимога у рівняннях з параметром часто формулюється завуальовано. Щоб розв'язувати такі рівняння, її потрібно чітко виокремити та усвідомити.

Більшість рівнянь із параметром, за формулюванням вимоги, можна поділити умовно на дві групи: а) рівняння, в яких вимога звучить — «розв'язати рівняння з параметром»; б) рівняння, в яких вимога звучить — «знайти такі значення параметра, за яких корені задовольняють певну умову чи умови».

У конкретних вправах обидві вимоги можуть мати і дещо інші формулювання, які суттєво від уже названих не відрізняються. Розв'язати рівняння з параметром — означає виконати його вимогу. На особливу увагу заслуговує запис відповіді. Вона, як правило, складається із декількох пунктів, кожні з яких доцільно писати складнопідрядним реченням на зразок: якщо ..., то ...

Так, наприклад, відповідь для рівняння $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$ (приклад 1) слід записати таким чином:

Відповідь. 1) якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, то рівняння розв'язків не має; 2) якщо $a = -\frac{4}{5}$, то рівняння має один корінь $x = -\frac{1}{3}$; 3) якщо $a \in \left(-\frac{4}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$, то рівняння має два різні корені $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$; 4) якщо $a = 1$, то рівняння має один корінь $x = -\frac{7}{6}$.

Пункти (2) і (4) для спрощення запису відповіді можна об'єднати в один, записавши: «якщо $a = -\frac{4}{5}$ або $a = 1$, то рівняння має один корінь відповідно, $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{7}{6}$».

Отже, підсумовуючи вище сказане доходимо висновку, що рівнянням з параметром називають рівняння з двома змінними $f_1(x; a) = f_2(x; a)$, де $f_1(x; a)$ та $f_2(x; a)$ — аналітично задані функції, змінна a має статус параметра (яку за певних умов розглядають як сталу величину), змінна x — незалежна змінна. Якщо згадані в означенні функції будуть функціями більше, ніж з двома змінними, то в рівнянні може бути і не один параметр або не одна незалежна змінна. Таких рівнянь ми розглядати майже не будемо.

Розв'язувати рівняння можна різними методами: методом евристичної редукції, графічним, підбором тощо. Схематично суть метода евристичної редукції полягає в такому: це рівняння зводять до нового, чи сукупності нових рівнянь, спосіб розв'язання яких загальновідомий. Потім з множини (множин) розв'язків останнього (останніх) утворюють множину розв'язків заданого рівняння. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0.$

Розв'язання. Якщо многочлен $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12$ розкласти певним способом на множники $(x^2 - 5x + 6)$ та $(x^2 - 3x + 2)$, то матимемо нове рівняння $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 3x + 2) = 0$. Воно рівносильне наведеному і водночас буде рівносильне сукупності квадратних рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0, \end{array}\right.$$

розв'язати які можна по-різному.

Знаючи множину коренів одного з них {2; 3} та другого {2; 1}, утворюємо множину розв'язків заданого рівняння {1; 2; 3}.

Використання методу евристичної редукції пов'язане з поняттям **рівносильності рівнянь**. З'ясуємо його зміст стосовно рівнянь з двома змінними. Нехай дано два рівняння:

$$f_1(x; y) = f_2(x; y) \qquad (3)$$

та

$$g_1(x; y) = g_2(x; y). \qquad (4)$$

Якщо множини розв'язків обох рівнянь рівні, то такі рівняння називають *рівносильними* і записують (3) $\Leftrightarrow$ (4), або $(f_1(x; y) = f_2(x; y)) \Leftrightarrow (g_1(x; y) = g_2(x; y))$. Символ $\Leftrightarrow$ — знак рівносильності. Нехай D_1 — множина розв'язків рівняння (3), а D_2 — множина розв'язків рівняння (4). У випадку рівносильності рівнянь (3) і (4) маємо $D_1 = D_2$. Якщо ж $D_1 \subset D_2$ (множина D_1 є підмножиною множини D_2), то рівняння (4) називається рівнянням-наслідком рівняння (3). Символічно це записується (3) $\Rightarrow$ (4). Символ $\Rightarrow$ — знак слідування з рівняння (3) рівняння (4). Наведені вище міркування дають можливість сформулювати означення:

***Означення* 2. Рівняння (4) називається рівнянням-наслідком рівняння (3), якщо кожний розв'язок рівняння (3) є розв'язком рівняння (4).**

***Означення* 3. Якщо рівнянням (3) є рівнянням-наслідком рівняння (4), а рівняння (4) є рівнянням-наслідком рівняння (3), то такі рівняння називаються рівносильними.**

Зауважимо, що рівняння, які не мають розв'язків, теж рівносильні. Перехід від одного рівняння до рівносильного йому називають *рівносильним переходом*. Існує низка тверджень, що вказують, які з перетворень даного рівняння приводять до рівносильного йому рівняння. Сформулюємо їх стосовно рівняння з двома змінними та будемо використовувати під час розв'язування рівнянь з параметром.

***Теорема* 1. Якщо до обох частин рівняння (3) додати числову функцію $\varphi(x; y)$, яка визначена на його області визначення D, то отримаємо рівняння $f_1(x; y) + \varphi(x; y) = f_2(x; y) + \varphi(x; y)$ (5) рівносильне рівнянню (3).**

Доведення. Нехай $(x_0; y_0)$ — довільний розв'язок рівняння (3). Тоді $f_1(x_0; y_0) = f_2(x_0; y_0)$ — правильна числова рівність. Підставимо у функцію $\varphi(x; y)$ замість змінних x і y їх числові значення x_0 та y_0. Оскільки вона визначена на області D, то $\varphi(x_0; y_0)$ — дійсне число. Додавши до обох частин числової рівності $f_1(x_0; y_0) = f_2(x_0; y_0)$ число $\varphi(x_0; y_0)$, отримаємо правильну числову рівність $f_1(x_0; y_0) + \varphi(x_0; y_0) = f_2(x_0; y_0) + \varphi(x_0; y_0)$. Отже, $(x_0; y_0)$, за означенням, розв'язок рівняння (5). Таким чином доведено, що рівняння (5) є рівнянням-наслідком рівняння (3). Міркуючи аналогічно, легко довести, що рівняння (3) є рівнянням-наслідком рівняння (5), пропонуємо це зробити читачу самостійно. Таким чином доведено, що (3) $\Rightarrow$ (5).

З теореми 1 *випливає наслідок.*

***Наслідок* 1.** Рівняння (3) і рівняння $f_1(x; y) - f_2(x; y) = 0$ — рівносильні.

***Теорема* 2. Якщо обидві частини рівняння (3) помножити на функцію $\varphi(x; y)$, значення якої при всіх допустимих значеннях змінних x і y відмінні від нуля, то отримаємо рівняння**

$$f_1(x; y) \cdot \varphi(x; y) = f_2(x; y) \cdot \varphi(x; y), \qquad (6)$$

рівносильне рівнянню (3).

З теореми 2 випливає наслідок.

***Наслідок* 2.** Якщо обидві частини рівняння (3) помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівносильне йому рівняння.

Доведення теореми 2 і наслідків 1 та 2 пропонуємо читачу здійснити самостійно. Наведені означення (1), (2) і (3), теореми (1) і (2) та наслідки з них (1) і (2) є тією теоретичною основою, на якій будується розв'язання рівнянь з параметром. Їх слід знати і вміти застосовувати. Під час *розв'язання рівнянь з параметром доцільно* дотримуватися наступного правила-орієнтиру (*див. таблицю 2*).

На завершення розглянемо кілька доцільних тренувальних вправ.

Приклад 5. Знайдіть область визначення рівняння з параметром a:

$ax + ax^2 + a - 2 = x^2 + 3x.$

Розв'язання. У лівій і правій частині рівняння стоять многочлени. Параметр a в одночленах можна вважати коефіцієнтом. Його значенням, як і змінної x, може бути будь-яке дійсне число. Отже, областю визначення рівняння буде множина всіх пар дійсних чисел. Геометрично це означає, що якщо розглядати систему декартових координат xOa на площині, то координати всіх точок цієї площини будуть допустимими значеннями змінних. При цьому параметр a «пробігає» всі значення числової прямої Oa, а змінна x — всі числові значення прямої Ox.

Таблиця 2

Правило-орієнтир розв'язання рівняння з параметром

№	Дія	Алгоритм виконання	Зауваження
1	Задане рівняння, якщо можливо, звести до рівносильного, виконавши тотожні перетворення. Одночасно визначити допустимі значення параметра і незалежної змінної	Актуалізувати (пригадати або знайти в підручниках, довідниках чи Інтернеті) відомості про лінійні, квадратні, ірраціональні, тригонометричні та інші рівняння, про тотожні перетворення відповідних виразів. Виконати тотожні перетворення виразів, тим самим спростити дане рівняння	Зберігати рівносильність переходів у перетворенні рівняння
2	З'ясувати, чи змінюється вид отриманого рівняння залежно від значень параметра. Якщо так, то роздробити множину допустимих значень параметра на окремі підмножини. Записати на кожній із підмножин рівняння у зміненому виді	На числовій прямій нанести область допустимих значень параметра та виокремити підмножини і записати рівняння, вид якого змінюється, заодно встановити при яких значеннях параметра рівняння не існуватиме	Вид рівняння може залежати як від одного значення параметра, так і від значень параметра, які він приймає на інтервалі, промені тощо. Розглядати всі можливі випадки
3	Виконати вимогу для кожного із рівнянь, вважаючи параметр сталою величиною	Розв'язати всі утворені рівняння відповідно на кожній з виокремлених підмножин, використовуючи актуалізовані знання про них, які не стосуються параметра	Зберігати рівносильність переходів у перетвореннях кожного з рівнянь
4	Записати відповідь для початкового рівняння	Користуючись числовою прямою (див. дію 2), з відповідей для окремих рівнянь утворити загальну відповідь	Відповідь має бути записана з кількох пунктів, складнопідрядним реченням

Відповідь: множина всіх пар дійсних чисел.

Приклад 6. Яких числових значень у рівнянні $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$ може набувати параметр a. Якого виду, залежно від параметра a, може бути задане рівняння.

Розв'язання. Очевидно, що значенням параметра a у рівнянні може бути будь-яке дійсне число. Однак якщо взяти $a=1$, то задане рівняння перетвориться на лінійне рівняння $6x+7=0$. Якщо ж $a\neq 1$, то задане рівняння можна розглядати як квадратне рівняння зі змінною x, у якому вирази $(a-1)$, $2(2a+1)$ та $(4a+3)$ — його коефіцієнти.

Відповідь: $a\in R$. Якщо $a=1$, то маємо лінійне рівняння $6x+7=0$; якщо $a\neq 1$, то маємо квадратне рівняння.

Приклад 7. Чи будуть *рівносильні* такі рівняння: $(a^2+a+1)x^2+ax+a^2=1-(2a^2x+3x)$ і $x^2+\frac{2a^2+a+3}{a^2+a+1}x+\frac{a^2-1}{a^2+a+1}=0$?

Розв'язання. Очевидно, що значенням параметра a, як і змінної x, у *першому рівнянні* буде будь-яке дійсне число. Тому його областю визначення є множина всіх пар дійсних чисел. Згідно з наслідком 1, йому рівносильним буде рівняння

$$(a^2+a+1)x^2+2a^2x+3x+ax+a^2-1=0.$$

Якщо в лівій частині цього рівняння (многочлені) виконати тотожні перетворення, то отримаємо нове, рівносильне йому рівняння; $(a^2+a+1)x^2+(2a^2+a+3)x+(a^2-1)=0$. Оскільки квадратний тричлен $a^2+a+1>0$ для всіх значень параметра a, то, згідно з наслідком 2 (поділивши останнє рівняння на $\varphi(x;\,a)=a^2+a+1$), отримаємо рівносильне рівняння $x^2+\frac{2a^2+a+3}{a^2+a+1}x+\frac{a^2-1}{a^2+a+1}=0$. Воно є квадратним зі змінною x і коефіцієнтами 1, $\frac{2a^2+a+3}{a^2+a+1}$ та $\frac{a^2-1}{a^2+a+1}$.

Відповідь: рівняння рівносильні.

Про види рівнянь з параметрами, способи їх розв'язування читайте в наступних публікаціях.

Вправи для самостійного розв'язання

1) Доведіть теорему 2 і наслідки 1 і 2.

2) Знайдіть область визначення рівняння з параметром a. Зобразіть її на декартовій координатній площині xOa:

а) $\sqrt{a-x}=a-\sqrt{-x}$;

б) $x=2|x-a|-2|x-2a|$;

в) $\sqrt{\frac{3}{2}x-a}=a-x$;

г) $\frac{3x^2-2}{a^2+3a}+\frac{x-1}{a+3}+\frac{2}{a}=0$.

3) Якого виду набуває рівняння залежно від значень параметра a?

а) $ax^2+3=a(x+3)$;

б) $(a^2-5a+6)x^2+(3a-1)x+2=0$.

4) Чи рівносильні рівняння:

а) $\frac{10}{5x-a}=\frac{3}{ax-2}$ і $5(2a-3)x=20-3a$;

б) $ax-\frac{3x}{a}-a=7-\frac{8}{a}-2x$ і $ax^2+(2a-3)x+(8-7a-a^2)=0$?

ЛІТЕРАТУРА

1. Амелькин В. В., Рабцевич В. А. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике / В. В. Амелькин, В. А. Рабцевич. — Мн.: «Асар», 1996. — 464 с.
2. Бугай А. С. Короткий тлумачний словник / За ред. С. М. Кіро і Ю. М. Шмандіна. — К.: Рад. шк, 1964. — 428 с.
3. Гончаренко Ю. В., Хрузин А. Н. Системы уравнений с параметрами. — К: «Кий», 1996. — 48 с.
4. Горделадзе Ш. Г. Збірник конкурсних задач з математики / *Ш. Г. Горделадзе, М. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук* // За заг. ред. Ф. П. Яремчука. — К.: Вища шк., Головне вид-во, 1988. — 328 с.
5. Горнштейн П. І., Полонський В. Б., Якір М. С. Задачі з параметрами. — Тернопіль: підручники і посібники. — 2004. — 256 с.
6. Ермаков С. М., Сабанеев В. С. Варианты письменных работ по математике (с решениями и ответами). — М.: Изд-во МГУ, 1972. — 84 с.
7. Задачі з параметрами: Навчальний посібник / В. М. Лейфура, А. І. Воробйова. — К.: ІЗМН, 1996. — 112 с.
8. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 240 с.
9. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Рольф, 1997. — 608 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2011. — 384 с.
11. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч.для 11 кл. з поглибл. вивч. математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С. Якір. - Х.: Гімназія, 2011. - Ч.1. - 256 с.
12. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч.для 11 кл. з поглибл. вивч. математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2011. — Ч. 2. — 272 с.
13. Натяганов В. Л., *Лужина Л. М.* Методы решения задач с параметрами: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 2003. — 368 с.
14. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учебное пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 512 с.
15. Сборник заданий для довузовской подготовки по математике. Для учащихся заочной формы обучения / Кругликов А. В., Плакса С. А. — К.: НТУУ «КПИ», 1999. — 248 с.
16. Тынянкин С. А. 514 задач с параметрами / С. А. Тынянкин. — Волгоград: Волгоградская правда, 1991. — 160 с.
17. Худобін О. І., Худобін М. І., Шуршалов М. П. Збірник задач з алгебри і елементарних функцій: Посібник для учнів 9 — 10 класів. — К.: Рад. шк., 1969. — 428 с.
18. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
19. Ясінський В. В. Алгебра. Вибрані конкурсі задачі / За ред. акад. А. М. Самойленка. — К.: Вирій, 1999. — 88 с.
20. Ястребинецкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1972. — 128 с.